Tanım 1.1.4 : *A bir küme ve $\{A_i\}_{i\in I}$, A kümesinin boş olmayan alt kümelerinden oluşan bir aile olsun.*

(a) $\{A_i\}_{i\in I}$ ailesi ikişer ikişer ayrık;

(b) $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ise

$\{A_i\}_{i\in I}$ ailesine A kümesinin bir ayrışımı denir.

Tanım 1.1.5 : *A ve B iki küme olsun.*

$$A \times B = \{\ (a,b) :\ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ile B'nin kartezyen çarpımı denir.

(a,b) ve (c,d) sıralı ikililerin eşitliği

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

biçiminde taımlandığından, genellikle $(a,b) \neq (b,a)$ ve dolayısıyla, $A \times B \neq B \times A$ dır. Eşitlik ancak $A = B$ olmaısı halinde veya bu kümelerden en az birinin boş küme olması halinde mümkündür.

1.2 Çözümlü Problemler

(1) 1.1'deki (c), (e) ve (i) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \cup (B \cap C) = \{\ x \in \mathbb{E} :\ x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\}$

$$\begin{aligned}
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ (x \in A \cup B) \text{ ve } (x \in (A \cup C)\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

(d) özelliğinin doğruluğu benzer şekilde gösterilir. Şimdi (i)'deki birinci eşitliğin doğruluğunu gösterelim. İkinci eşitlik benzer olarak gösterilir.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \;\text{ ve }\; x \notin B \\
&\Rightarrow x \in A^c \;\text{ ve }\; x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \\
&\Rightarrow (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c. \\
x \in A^c \cap B^c &\Rightarrow x \in A^c \;\text{ ve }\; x \in B^c \\
&\Rightarrow x \notin A \;\text{ ve }\; x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c.
\end{aligned}$$

Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(2) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 1.1' deki (c) ve (e) özelliklerinden

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B)$$

dir. Şimdi $A \cap (A \cup B) = A$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (A \cup B) &\Rightarrow x \in A \;\text{ ve }\; x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \\
&\Rightarrow A \cap (A \cup B) \subset A, \\
x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B) \\
&\Rightarrow A \subset A \cap (A \cup B).
\end{aligned}$$

Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(3) **(a)** $(A^c)^c = A$; **(b)** $\mathbb{E}^c = \emptyset$ **(c)** $\emptyset^c = \mathbb{E}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: **(a)** $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A^c)^c \subset A$,

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow A \subset (A^c)^c$$

dir. Her iki kapsamadan **(a)** eşitliği bulunur.

(b) $\forall x \in \mathbb{E}$ için $x \notin \mathbb{E}^c$ olduğundan $\mathbb{E}^c$ boş bir kümedir.

(c) $x \in \mathbb{E} \Rightarrow x \notin \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset^c \Rightarrow \mathbb{E} \subset \emptyset^c$. Öte yandan, $\emptyset^c \subset \mathbb{E}$ olduğundan sonuç elde edilir. $\diamond$

(4) $(A \setminus B) \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in (A \setminus B)$ olsun. Bu durumda, $x \in A$ ve $x \notin B$ dir. Eğer, $x \notin C$ ise $x \in (A \setminus C)$ dir. Dolayısıyla, $x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olur. Eğer, $x \in C$ ise $x \notin B$ olduğu durumlarda $x \in (C \setminus B) \Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olur. Böylece, hem $x \notin C$, hem de $x \in C$ olduğunda $x \in (A \setminus B) \Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ dir. Buradan sonuç elde edilir. $\diamond$

(5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ve $D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olsun. $x \in C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (B \setminus A) \Rightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \in B$ ve $x \notin A) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = D \Rightarrow C \subset D$. Şimdi $D \subset C$ olduğunu gösterelim. $x \in D \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $\{(x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \notin A$ ve $x \in B)\} \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = C$. Her iki kapsamadan $D = C$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(6) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $D = (A \setminus B) \cap C$ ve $G = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ olsun. $x \in D \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ ve $x \in C \Rightarrow x \in A$ veya $x \notin B$ ve $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C)$ ve $x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) = G \Rightarrow D \subset G$. $x \in G \Rightarrow x \in (A \cap C)$ ve $x \notin (B \cap C) \Rightarrow (x \in A$ ve $x \in C)$ ve $\{(x \in B$ ve $x \notin C)$ veya $(x \notin B$ ve $x \in C)\} \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ ve $x \in C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C = D \Rightarrow G \subset D$. Her iki kapsamadan $D = E$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(7) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $D = A \cup (B \setminus C)$ ve $G = (A \cup B) \setminus C$ olsun. $x \in G \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $x \notin C \Rightarrow x \in A$ veya $x \in B \setminus C \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C) = D \Rightarrow D \supset G$. $\diamond$

(8) $A \cap B = \emptyset$ ise, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ ve $D = A \cup B$ olsun. $x \in C \Rightarrow (x \in (A \cup B))$ ve $(x \in (A^c \cup B^c)) \Rightarrow x \in D \Rightarrow C \subset D$. $x \in D \Rightarrow \{(x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \notin A$ ve $x \in B)\ \} \Rightarrow \{(x \in A$ ve $x \in B^c)$ veya $(x \in A^c$ ve $x \in B)\} \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \in (A^c \cup B^c) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = C \Rightarrow D \subset C$. Her iki kapsamadan $C = D$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(9) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \notin A$ ve $x \in B) \Leftrightarrow \{(x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $x \in B\}$ ve $\{(x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $x \notin A\} \Leftrightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $(x \notin A$ veya $x \notin B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(10) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(a, b) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow a \in A$ ve $b \in B \setminus C \Leftrightarrow a \in A$ ve $(b \in B$ ve $b \notin C) \Leftrightarrow (a \in A$ ve $b \in B)$ ve $(a \in A$ ve $b \notin C) \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ ve $(a, b) \notin A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(11) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow x \in A^c$ ve $x \notin B^c \Rightarrow (x \in E$ ve $x \notin A)$ ve $x \in B \Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow A^c \setminus B^c \subset B \setminus A$. $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \notin B^c$ ve $x \in A^c \Rightarrow x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow B \setminus A \subset A^c \setminus B^c$. Her iki kapsamadan istenen eşitlik bulunur. $\diamond$

1.3 Ek Problemler

(12) A, B ve C kümeleri $\mathbb{E}$ nin herhangi üç alt kümesi olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \setminus A = \emptyset$;

(b) $A \setminus \emptyset = A$;

(c) $A \triangle \emptyset = A$;

(d) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

(e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

(g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(i) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$;

(j) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(k) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

(l) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

(m) $(A \cup B) \backslash C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(n) $(A \cap B) \backslash C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(o) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

(p) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$;

(q) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;

(r) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;

(s) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(t) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(u) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

(v) $A \setminus B = A \cap B^c$;

(w) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$;

(x) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

(13) A, B, C ve D kümeleri $\mathbb{E}$ nin herhangi dört alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;

(b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$;

(c) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;

(d) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$;

(e) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$;

(f) $A \cup B = J \Leftrightarrow A^c \subset B = J \Leftrightarrow B^c \subset A$;

(g) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^c$, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$;

(h) $(A \subset B^c) \Leftrightarrow (B \subset A^c)$;

(i) $A \triangle B = J \Leftrightarrow A = B^c$;

(j) $A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c$;

(k) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$;

(l) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$;

(m) $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$;

(n) $A \triangle B \subset (A \triangle D) \cup (B \triangle D)$;

(o) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(14) A_1, A_2, B_1 ve B_2 $\mathbb{E}$ nin herhangi dört alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$;

(b) $(A_1^c \cup A_2^c) \triangle (B_1^c \cup B_2^c) \subset (A_1^c \triangle B_1^c) \cup (A_2^c \triangle B_2^c)$;

(c) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

(d) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2)$;

(e) $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \setminus (A_2 \triangle B_2)$.